



EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont données dont une seule est correcte.

Tu écriras le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse choisie.

Exemple : 6 – a ou 6 – b ou 6 – c.

N°	Affirmations	Réponses		
1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2$	$-\infty$	$+\infty$	0
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+4}{x+1}} =$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	2
3	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} \frac{x^3-8}{x-2} =$	4	12	$+\infty$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{\sin x} =$	$\frac{1}{2}$	2	0
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-1} + 3x =$	$+\infty$	0	$-\infty$

EXERCICE 2

(O ; I ; J) est un repère du plan.

(C) est la représentation graphique d'une fonction f ; d'ensemble de définition D_f .

Pour chaque proposition répond par Vrai ou Faux. (Exemple : 10 – Vrai ou 10 – Faux).

N°	Affirmations
1	a est un réel ; $a \in D_f$ et la limite de f en a est infinie. Donc f n'est pas prolongeable par continuité en a .
2	Si f réalise une bijection de l'intervalle I vers $f(I)$ et que $0 \notin f(I)$ alors il existe un unique élément α de I tel que $f(\alpha) = 0$.
3	Si $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{2}{x^2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} + 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
4	La courbe représentative de la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.
5	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a ; +\infty[$, alors, on a : $f([a ; +\infty[) = [f(a) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$.
6	Si f une fonction et strictement décroissante sur un intervalle K et si $0 \notin f(K)$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans K .
7	Si f et g sont deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ telles que g ne s'annule pas.

	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.
8	Si $f(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2}$; $x \neq 2$ et $f(2) = -\frac{5}{4}$ alors f est continue en 2.
9	(C) est la courbe représentative d'une fonction f telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

EXERCICE 3

Pour chacune des affirmations suivantes, écris sur ta copie la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
1	$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$	$(ab)^{\frac{2}{n}}$	$(ab)^{\frac{1}{n}}$	$(ab)^{\frac{1}{2n}}$
2	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a}$	$\sqrt[m+n]{a^{n \times m}}$	$\sqrt[m \times n]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n \times m]{a}$
3	$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} \times (\sqrt[5]{2^7})$	$2^{10\sqrt{2}}$	$2^{3^5\sqrt{2}}$	$2^{3^7\sqrt{2}}$

EXERCICE 4

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 4x^3 - x^{11} + 8$; 2. $f(x) = \frac{3x^2-2x+5}{-x^2+x-3}$; 3. $f(x) = \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$; 4. $f(x) = \sqrt{2}$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-3}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3+x}{x^2-2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{x^2+x-6}$; 5. $\lim_{x \rightarrow 2018} 25$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x^2}{x^3}$; 7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{4-x^2}$; 9. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+2x+3}{x^2-25}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$; 5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{12-2x}}{x-4}$; 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}$; 7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x+1}-2}$

EXERCICE 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{6-2x} - \sqrt{8-2x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-5} - \sqrt{4x-7}$; 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-1} + 3x$; 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{2}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{6-2x} + 4x - 4$; 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 + \sqrt{x^2-2x+2}$; 7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$; 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x-2x-1}}{x-1}$

EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes en utilisant la définition du nombre dérivée :

1. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$; 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2+7}-3}{x+1}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$; 5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$; 6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$

EXERCICE 9

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x}$; 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{2x} ; 7. \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) ; 8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x-4)}{4x-8} ; 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(6x)}{6x} ; 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)$$

EXERCICE 10

Calcule les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 + 3 \sin x ; 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \cos x} ; 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sin(5x^2)}{x^2 + 1} ; 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin(3x)}{2x^3}$$

EXERCICE 11

Le but de cet exercice est de calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})]$.

Pour cela, on considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b- Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) On considère la fonction g définie sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

a- Démontre que : $\forall x \in D_f, g(x) = 2 \frac{\sin f(x)}{f(x)}$.

b- Déduis – en que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

3) a- Vérifie que , $\forall x \in [1; +\infty[, x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$.

b- Déduis – en : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})]$.

EXERCICE 12

A - On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f \circ g(x)$.

B - Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + 5x + 1} ; 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1-2\pi x}{3x+4}\right) ; 3. \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x^2+x-6}{2-x} \right| ; 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 2)^7$$

EXERCICE 13

Interprète graphiquement chacune des limites suivantes :

$$a- \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty ; b- \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x - 2 = 0 ; c- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty ; d- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

EXERCICE 14

Etudie la continuité de f en a dans les cas suivants :

$$1. \begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}, \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[\\ f(x) = \frac{-x}{|x|} + 1, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\\ f(0) = 0 \end{cases} \quad a = 0 ; 2. \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+7x+12}{x+3} ; \text{si } x \neq -3 \\ f(-3) = 1 \end{cases} \quad a = -3$$

EXERCICE 15

Dans chacun des cas suivants, peut – on prolonger par continuité f en a ? Si oui donné le prolongement g .

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} \quad a = 2 ; 2. f(x) = \frac{1-x^3}{x-1} \quad a = 1 ; 3. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad a = 0$$

$$4. f(x) = \frac{\sin 2x}{3x} \quad a = 0 ; 5. f(x) = \frac{9-x^2}{|x-3|} \quad a = 3$$

EXERCICE 16

Soit h la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = \frac{1}{4}$

1) a- Déterminer l'ensemble de définition de h .

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

c- Etudier la continuité de h en 0.

d- Dédurre le prolongement par continuité en 0 de h .

2) En utilisant $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, calculer les limites suivantes : a- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-2x}}{3x}$ b- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$

EXERCICE 17

On donne ci – dessous, le tableau de variation d'une fonction f continue sur son ensemble de définition $] -3; 1[\cup]1; +\infty[$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

x	-3	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		2	-3

Diagramme de variation : La courbe (C) a une asymptote verticale en $x = -3$ (où $f(x) \rightarrow +\infty$) et une asymptote horizontale en $y = 1$ (où $x \rightarrow -2$). Elle passe par le point $(1, 2)$ et tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. La fonction est strictement décroissante sur $] -3; -2[$ et $]1; +\infty[$, et strictement croissante sur $] -2; 1[$.

1) Précise les asymptotes à la courbe (C) en justifiant ta réponse.

2) a- Justifie que f est prolongeable par continuité en 1.

b- Définis le prolongement par continuité en 1.

3) Détermine l'image de l'intervalle $] -3; 1[$.

4) On désigne par h la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

a- Justifie que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle K que l'on précisera.

b- Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h sur son ensemble de définition.

c- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]1; +\infty[$.

d- Donne un encadrement de β à 10^{-1} près par la méthode de balayage

5) Détermine le signe de f sur son ensemble de définition.

6) Donner l'allure générale de la courbe (C).

EXERCICE 18

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 - x^2 - x - 3$.

1) Démontre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; -\frac{1}{3}[$ et $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $] -\frac{1}{3}; 1[$.

2) Dresse le tableau de variation de f . On donne : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{76}{27}$.

3) Détermine l'image de f de chacun des intervalles suivants : $] -\infty; -\frac{1}{3}[$, $] -\frac{1}{3}; 1[$, $]1; +\infty[$ et $] -\frac{1}{3}; +\infty[$.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a- Démontre que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; +\infty[$.

c- Justifie que : $2,1 < \alpha < 2,2$.

5) On note h^{-1} la bijection réciproque de h .

Donne le sens de variation de h^{-1} et donne son tableau de variation.

6) Démontre que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

SITUATION COMPLEXE

Un artisan produit des articles. Un technicien du Ministère de l'Artisanat, après une étude de son activité, a estimé que si tous les articles produits sont vendus, le bénéfice moyen, en milliers de francs, des x articles est estimé par la fonction suivante : $f(x) = 4000x + \frac{400\,000}{x}, x \geq 1$.

Voulant connaître l'évolution de son activité, il soumet le résultat de l'étude à son fils élève de Terminale.

1. Détermine le bénéfice que l'artisan fera pour 100 articles, pour 1000 articles vendus.
2. Dis comment évoluera le bénéfice. Justifie ta réponse.